Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 - Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Alonso Ruiz (airuiz@uc.cl)

Ayudantía 10

Problema 1

Considere un condensador de placas paralelas conectado a una fuente de potencial V constante. Al condensador se le introduce un dieléctrico de constante dieléctrica k, tal como se ve en la figura 1. Encuentre la densidades de polarización en los bordes del dieléctrico.

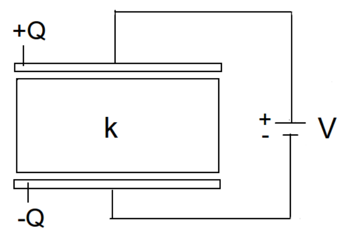

Figura 1:

Solución

La densidad de carga de polarización en la superficie del dieléctrico va a venir dada por:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}\Big|_{Superficie} \tag{1}$$

Donde $\hat{n}$ es la normal exterior al dieléctrico y el vector de polarización $\vec{P}$ esta dado por $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$. Como $\chi = k - 1$ entonces el vector de polarización es:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (k-1)\vec{E} \tag{2}$$

Para calcular $\vec{E}$ simplemente usamos que en un dieléctrico $\epsilon_0 \to \epsilon = k\epsilon_0$, con lo que el campo eléctrico queda como:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{k\epsilon_0}(-\hat{x}) \tag{3}$$

Donde el eje x apunta hacia arriba y el campo va hacia abajo porque la placa de arriba del condensador queda con carga positiva, digamos $+Q$, pero esta no va importar en los calculos. Con esto el vector de polarización es:

$$\vec{P} = \frac{(k-1)\sigma}{k}(-\hat{x}) \tag{4}$$

La normal exterior en la placa de abajo va a ser $-\hat{x}$ y en la placa de arriba va a ser $+\hat{x}$. Por lo tanto las densidades de polarización son:

$$\sigma_p\Big|_{abajo} = \frac{(k-1)\sigma}{k}(-\hat{x})\cdot(-\hat{x}) = +\frac{(k-1)\sigma}{k} \tag{5}$$

$$\sigma_p\Big|_{arriba} = \frac{(k-1)\sigma}{k}(-\hat{x})\cdot(+\hat{x}) = -\frac{(k-1)\sigma}{k} \tag{6}$$

Problema 2

Considere nuevamente un condensador de placas paralelas, donde las placas tienen largo a y ancho b, tal como se ve en la figura 2. El condensador se desconectó de la fuente una vez que se cargó. Si se introduce un dieléctrico de constante k hasta cierta distancia, encuentre:

a) La capacitancia en función de x.

b) La energía del sistema y la fuerza sobre el dieléctrico.

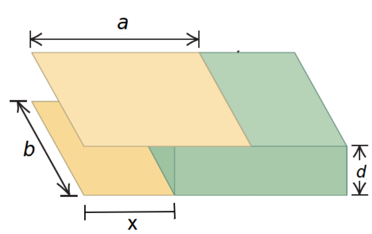

Figura 2:

Solución

a) Dado que la fuente se desconectó una vez que se cargo el condensador, entonces estos quedan con carga constante, digamos Q. Como las placas están a potencial constante, entonces esto significa que podemos considerar la parte con y sin dieléctrico como 2 condensadores en paralelo, ya que están al mismo potencial. Por lo tanto la capacitancia total C_T va a venir dada por:

$$\begin{aligned} C_T &= C_{vacio} + C_{dielectrico} \\ &= \frac{\epsilon_0 x b}{d} + \frac{k\epsilon_0 (a-x) b}{d} \\ &= \frac{\epsilon_0 b}{d}[ka + (1-k)x] \end{aligned} \tag{7}$$

b) Dado que Q es constante y que conocemos la capacitancia C_T del condensador, entonces la energía la podemos calcular como:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_T} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 b}\frac{1}{ka + (1-k)x} \tag{8}$$

Y dado que esta es una fuerza conservativa ya que solo depende de la posición x, entonces la fuerza sobre el dieléctrico va a venir dada por $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Por lo tanto:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_T}\right)\hat{x} \tag{9}$$

Aplicando regla de la cadena sobre C_T ya que es lo único que depende de x, entonces la fuerza queda como:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_T^2}\frac{dC_T}{dx}\hat{x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_T^2}\frac{\epsilon_0 b}{d}(1-k)\hat{x} \tag{10}$$

Dado que $k \geq 1$ y que todo lo que esta antes de $(1-k)$ es positivo, entonces se tiene que la fuerza apunta en dirección $-\hat{x}$ porque $1-k < 0$, con lo que el sistema tira el dieléctrico hacia dentro del condensador.

Probema 3

Se tiene una corteza dieléctrica esférica de constante dieléctrica k, radio interior a y radio exterior b. Dentro de esta corteza hay un conductor esférico de radio δ y carga q, tal como de ve en la figura 3. Encuentre:

a) La energía del sistema

b) Las densidades superficiales de polarización en la corteza dieléctrica.

c) La densidad volumetrica de polarización.

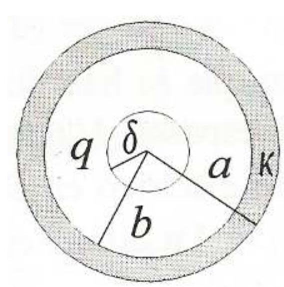

Figura 3:

Solución

a) Dado que es un medio continuo, la energía va a estar dada por:

$$U = \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{E}|^2 dV \tag{11}$$

Con $\epsilon = k\epsilon_0$. Dado que para $r < \delta$ el campo eléctrico es 0 porque se tiene un conductor, entonces se tienen 3 zonas que aportan a la integral:

- $R1: \ \delta < r < a$
- $R2: \ a < r < b$
- $R3: \ r > b$

Con lo que la energía queda como:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{R_1} |\vec{E_1}|^2 dV + \frac{k\epsilon_0}{2}\int_{R_2} |\vec{E_2}|^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2}\int_{R_3} |\vec{E_3}|^2 dV \tag{12}$$

Para calcular el campo eléctrico en cada zona, se puede usar la ley de Gauss, con la cual los campos son:

$$\begin{aligned}
\vec{E_1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{para } \delta < r < a \\
\vec{E_2} &= \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{para } a < r < b \\
\vec{E_3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{para } r > b
\end{aligned}$$

Sea I_j la integral sobre la región R_j, con $j = \{1, 2, 3\}$, entonces se tiene que:

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\delta}^{a} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{q^2}{r^4}\, r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{a}\right) \tag{13}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{a}^{b} \frac{1}{(4\pi k\epsilon_0)^2}\frac{q^2}{r^4}\, r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2}\frac{b-a}{k^2ab} \tag{14}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{b}^{\infty} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{q^2}{r^4}\, r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2}\frac{1}{b} \tag{15}$$

Reemplazando las integrales en (12), se encuentra que la energía viene dada por:

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{a} + \frac{b-a}{kab} + \frac{1}{b}\right) \tag{16}$$

b) La densidad de polarización en la superficie del dieléctrico va a venir dada por:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}\Big|_{Superficie} \tag{17}$$

con $\hat{n}$ la normal exterior al dieléctrico. El vector de polarización va a venir dado por:

$$\vec{P} = \epsilon_0(k-1)\vec{E} = \frac{k-1}{4\pi k}\frac{q^2}{r^2}\hat{r} \tag{18}$$

La superficie con $r = a$ tiene normal exterior $-\hat{r}$ y la superficie en $r = b$ tiene normal exterior $+\hat{r}$. Con esto las densidades de polarización van a ser:

$$\sigma_p\Big|_{r=a} = \frac{k-1}{4\pi k}\frac{q^2}{a^2}(\hat{r}) \cdot (-\hat{r}) = -\epsilon_0(k-1)\vec{E} = -\frac{k-1}{4\pi k}\frac{q^2}{a^2} \tag{19}$$

$$\sigma_p\Big|_{r=b} = \frac{k-1}{4\pi k}\frac{q^2}{b^2}(\hat{r}) \cdot (+\hat{r}) = -\epsilon_0(k-1)\vec{E} = \frac{k-1}{4\pi k}\frac{q^2}{a^2} \tag{20}$$

c) La densidad volumetrica de polarización va a venir dada por:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \tag{21}$$

Como estamos trabajando con coordenadas esféricas, entonces la divergencia debe estar en coordenadas esféricas. Para un campo vectorial arbitrario $\vec{F}$, la divergencia en coordenadas esféricas va a estar dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta F_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \tag{22}$$

Como en este caso $\vec{P}$ no depende de θ ni de ϕ entonces las derivadas en los ángulos son 0. Evaluando se tiene finalemente que:

$$\rho_p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{k-1}{4\pi k}\frac{q^2}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k-1}{4\pi k}q^2\right) = 0 \tag{23}$$